1.4 无穷小量与无穷大量

1.4.1 无穷小量

1.4.2 无穷大量

1.4.1 无穷小量

1.无穷小量的定义

定义1.4.1 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一个去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的无穷小。

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则称$f(x)$为当$x\to\infty$时的无穷小

若$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则称$f(x)$为当$x\to-\infty$时的无穷小

注 (1)无穷小与“当 $x \to x_0$时"密切有关。

例如 函数$f(x)=x-1$当$x \to 1$时是无穷小，

而当$x \to 0$时则不是无穷小。

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当$x \to \infty$时为无穷小，当$x \to 0$时不是无穷小。

(2) 无穷小是一变量，是函数，常数中只有0是无穷小。

$\therefore 10^{-8}$(常量,确切数值)不是无穷小，

视0为常值函数 如：$f(x)=0,\ x \in (-1,3)$

则0为$x \to 1$时的无穷小

2. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小的和也是无穷小。

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0,$ 则 $\forall \varepsilon>0,$

$\exists \delta_1>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)+g(x)-0|\le|f(x)|+|g(x)|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$$

(2) 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小。更一般地:

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $x\in U^0(x_0,\delta_1)$ 时, 有 $|f(x)|\le M$

证 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$

$\therefore$ 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)g(x)|\le M|g(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$$

推论1. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2. 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

2. 无穷小与函数极限的关系

定理1.4.1 在自变量的同一变化过程中 $(x \to x_0$ 或 $x \to \infty)$,

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\lim \alpha(x) = 0.$

证：仅证 $x \to x_0$. $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - A \right) = 0 \Leftrightarrow f(x) - A = \alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

1.4.2 无穷大量

1.无穷大的定义

当 $\begin{matrix} x \to x_0 \\ (x \to \infty) \end{matrix}$ 时，$|f(x)|$无限增大，称$f(x)$当 $\begin{matrix} x \to x_0 \\ (x \to \infty) \end{matrix}$ 时为无穷大.

如：$\left|\dfrac{1}{x}\right|$当$x \to 0$时为无穷大，$x^2$当$x \to \infty$时为无穷大

定义1.4.2 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一个去心邻域内有定义，若 $\forall M>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$时恒有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$在$x \to x_0$时为无穷大，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=\infty.$$

类似可定义$x\to\infty$时的无穷大:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0, \text{当}|x|>X\text{时}, |f(x)|>M$$

1.4.2 无穷大量

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, 当 0<|x-x_0|<\delta$$

$$时，恒有 |f(x)|>M$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0,$$

$$当 x_0<x<x_0+\delta 时，恒有 f(x)<-M$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0, 当 |x|>X 时, |f(x)|>M$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

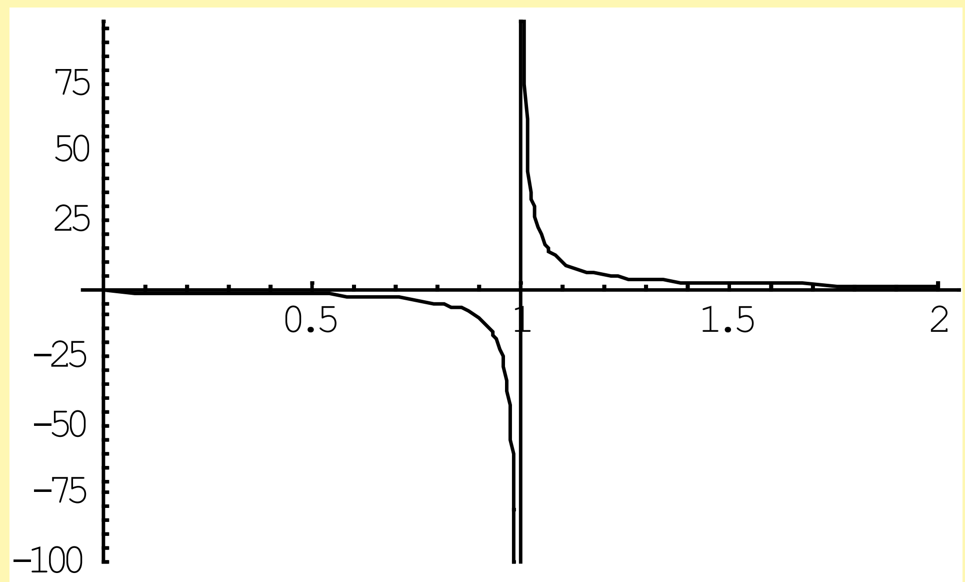
$$\Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0, 当 x<-X 时，f(x)>M$$

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证 $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$, 只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$

取 $\delta=\dfrac{1}{M}>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$



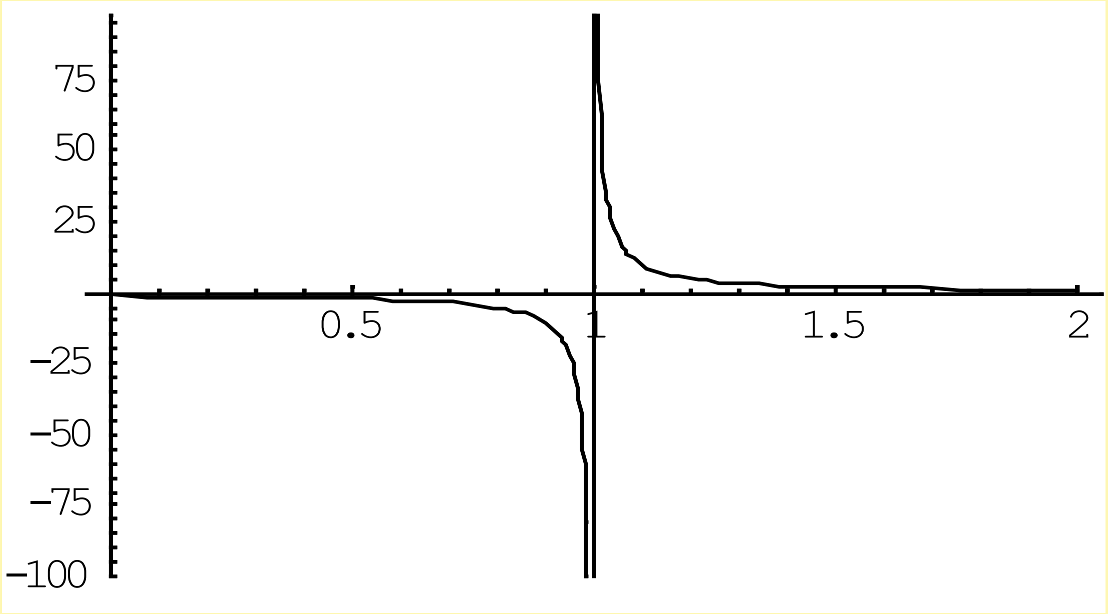
注 (1) $x=1$ 是 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 图形的一条铅直渐近线。

定义： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to x_0^-)}} f(x)=\pm\infty$),

则直线$x=x_0$是$y=f(x)$函数图形的

一条铅直渐近线。

(2) 准确地, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\quad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$



2.无穷大与无穷小的关系

定理1.4.2 $\lim f(x)=\infty \Rightarrow \lim\dfrac{1}{f(x)}=0$;

$\lim f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0 \Rightarrow \lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$。

即在自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小，而无穷小(非零)的倒数是无穷大。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta$时

恒有$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,$

$\exists\delta>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta$时 恒有$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$

3.无穷大与无界的关系

定理1.4.3 若函数$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大，则必存在x_0的某一去心邻域$U^0(x_0,\delta)$，在此邻域内函数$f(x)$一定是无界的($x \to \infty$时，也有类似的结论成立)。 $f(x)$无穷大$\Leftrightarrow$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时 恒有$|f(x)| > M$.

函数$f(x)$在区间I上无界$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in I$, 有$|f(x_0)| > M$

数列$\{x_n\}$无界$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0$,有$|x_{n_0}| > M$

无穷大$\Rightarrow$ 无界 (反之,不一定) 反例 1,0,2,0,3,0,……

回忆： 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\sin x$$

但 无穷大乘以有界量, 不一定是无穷大。

例 试证： $y=x\cdot\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界,但当

$x\to\infty$时不是无穷大。

$$(\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty : \forall M>0, \exists X>0, 当x>X时\left|f(x)\right|>M)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\neq\infty : \exists M_0>0, \forall X>0, \exists x_0>X, \left|f(x_0)\right|\leq M_0$$

详见《高等数学同步学习指导》第11页例12（2）。